ESTADÍSTICA PARA TOD@S: ADAPTACIÓN A LA DIVERSIDAD FUNCIONAL

TEORÍA DE LA PROBABILIDAD: ANÁLISIS COMBINATORIO

UNIVERSIDAD PABLO DE OLAVIDE

ÁREA DE ESTADÍSTICA E IO

Autoras:

Nieves Aquino Llinares

Mª del Pilar Moreno Navarro

UNIVERSIDAD PABLO DE OLAVIDE

OCTUBRE DE 2022

ISBN: 978-84-09-44464-9

Introducción

Esta publicación forma parte de un proyecto más ambicioso que se denomina ***Estadística para tod@s: adaptación a la diversidad funcional*** y a través del cual las autoras, conscientes de la falta de material específico en estadística adaptado a diversas discapacidades, quieren poner su granito de arena para alcanzar una universidad más inclusiva, con la realización de píldoras formativas y publicaciones de apoyo al estudio accesibles a diversas discapacidades.

En concreto este anexo es un complemento al vídeo formativo **"Análisis Combinatorio",** adaptado a personas con discapacidad auditiva. La teoría combinatoria es muy útil en todas aquellas áreas científicas donde es muy importante la agrupación de elementos o su ordenación. Su uso es muy común en problemas cotidianos de la vida real como ordenar las mesas en un evento o juegos de azar tan presentes en la sociedad como es la lotería primitiva.
Además, para personas con discapacidad visual esta píldora docente cuenta con material de apoyo en soporte informatizado Edico disponible en el Servicio bibliográfico de ONCE.

La cápsula docente puede visualizarse en el siguiente enlace:

Cápsula formativa: Análisis Combinatorio

1ª DIAPOSITIVA **Minuto: 00:10**

Bienvenidos a la serie “Estadística para tod@s: adaptación a la diversidad funcional”, cuyas autoras son Nieves Aquino Llinares y Mª del Pilar Moreno Navarro, profesoras del área de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Pablo de Olavide. Su objetivo es hacer una Universidad más inclusiva con la creación de píldoras formativas de material estadístico adaptadas a diversas discapacidades.

2ª DIAPOSITIVA **Minuto: 00:35**

Concretamente, en este vídeo hablaremos sobre conceptos básicos del análisis combinatorio, utilizado frecuentemente, por ejemplo, en el cálculo de probabilidades a través de la regla de Laplace.

3ª DIAPOSITIVA **Minuto: 00:49**

El análisis combinatorio nos informa sobre las diferentes formas que existen de hacer agrupaciones a partir de los elementos de un conjunto. Por ejemplo, si tenemos el conjunto formado por las letras L, A, M y S ¿qué agrupaciones se pueden hacer? Pues dependerá de cuántas letras podamos utilizar en las agrupaciones e incluso de si podemos repetirlas. De esta forma podemos formar la palabra SAL, agrupación de 3 letras y sin repetición o la palabra MALA, agrupación de 4 letras donde sí se repite la letra A.

4ª DIAPOSITIVA **Minuto: 01:25**

Por tanto, partiendo de un conjunto de diferentes elementos, podremos hacer grupos teniendo en cuenta si influye o no el orden de colocación de los elementos, si debemos o no tomar todos los elementos del conjunto para hacer la agrupación y por último si se pueden o no repetir los distintos elementos.

5ª DIAPOSITIVA **Minuto: 01:45**

Según lo anterior, en el análisis combinatorio se identifican 3 herramientas diferentes: las Variaciones, las Permutaciones y las Combinaciones y todas ellas a su vez se pueden realizar con o sin repetición.

Estudiemos en profundidad cada una de estas herramientas comencemos con las **Variaciones sin repetición**.

6ª DIAPOSITIVA **Minuto: 02:08**

Las variaciones sin repetición de **N elementos** tomados **de m en m** se definen como las diferentes formas de agrupar m elementos diferentes elegidos entre los N posibles considerando un grupo diferentes de otro:

- Si difieren en algún elemento. Por ejemplo, el grupo (a,b) será diferente al (a,x), o,
- Si, aun teniendo los mismos elementos, estos están situados en distinto orden. Por ejemplo, el grupo (a,b) es distinto al grupo (b,a).

7ª DIAPOSITIVA **Minuto: 02:44**

Las variaciones sin repetición de N elementos, tomados de m en m se identifican con una V mayúscula y subíndices N y m.

Su cálculo es a través de la siguiente fórmula:

$$V_{N,m} = N(N-1)(N-2)\cdots(N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}$$

Hay que indicar que $\mathbf{N!}$ es una operación matemática que lo que hace es multiplicar N por su anterior, y por su anterior, y por su anterior, y así hasta llegar al 1. Por ejemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Para aclarar su utilidad y cálculo estudiemos de qué forma pueden agruparse 9 elementos en grupos de 4 de forma que el orden de los elementos influya y no se pueda repetir ningún elemento en el grupo. Tendríamos que calcular las Variaciones de 9 elementos tomados de 4 en 4. Es decir,

$$V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 3.024 \text{ formas}$$

8ª DIAPOSITIVA **Minuto: 04:09**

Veamos ahora un ejemplo práctico con una aplicación a un problema de la vida real.

En un torneo de salto con pértiga en el que participan 10 atletas, ¿de cuántas formas pueden repartirse las tres medallas; oro, plata y bronce?

Identifiquemos primero los elementos y requisitos que tenemos.

En primer lugar, tenemos que N=10 pues los grupos los podemos hacer con los 10 atletas. En segundo lugar, m=3 pues solo haremos grupos de 3 elementos. Por lo tanto, haremos grupos como (María, Flor y Candela) o (Flor, Mar y Candela).

9ª DIAPOSITIVA **Minuto: 04:51**

El orden del grupo sí influye pues no es lo mismo que María obtenga la medalla de oro a que la obtenga Flor. El grupo no estará formado por todos los elementos pues solo elegiremos 3 de las 10 atletas. Y por último no se pueden repetir los elementos pues María no puede obtener a la misma vez la medalla de oro y la de plata.

¿Cuántas agrupaciones hay diferentes? Calculamos las variaciones sin repetición de 10 elementos tomados de 3 en 3. Esto es igual a:

$V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!} = \mathbf{720}$ **formas** o agrupaciones diferentes.

10ª DIAPOSITIVA **Minuto: 05:35**

Estudiemos ahora las **Variaciones con repetición** cuya base es la misma que las variaciones antes vistas, pero con la peculiaridad de que un mismo elemento puede repetirse en el grupo.

Es decir, la variación con repetición de N elementos tomados de m en m son aquellas agrupaciones de m elementos, los cuales pueden repetirse, tomados del grupo disponible de N elementos siendo una agrupación diferente de otra si difiere algún elemento o si, aun teniendo los mismos elementos estos se sitúan en diferente orden.

Por ejemplo, el grupo formado por (amarillo, rojo, amarillo) es diferente al grupo (amarillo, rojo, verde) e incluso diferente al grupo (rojo, amarillo, amarillo).

11ª DIAPOSITIVA **Minuto: 06:30**

Su nomenclatura es VR subíndice N, m.

Para calcular el número de variaciones con repetición que se pueden calcular con N elementos tomados de m en m se calcula N elevado a m.

$VR_{N,m}=N^m$

Como caso práctico calculemos las variaciones, con repetición, de 9 elementos tomados de 3 en 3.

$VR_{9,3}=9^3=729$ formas.

Sigamos repasando con el siguiente ejemplo.

12ª DIAPOSITIVA **Minuto: 07:05**

Lanzamos una moneda 7 veces consecutivas y anotamos el resultado, cara o cruz, en el orden en que se han lanzado. ¿Cuántos resultados diferentes podemos tener?

Solo tenemos dos elementos, cara o cruz, para crear los grupos por lo que N=2. Como lanzamos 7 veces la moneda tenemos grupos de 7 elementos luego m=7.

13ª DIAPOSITIVA **Minuto: 07:36**

Antes de decidir qué herramienta del análisis combinatoria tomamos debemos identificar si influye o no el orden de los elementos en el experimento. Si utilizamos todos los elementos disponibles o no y si se pueden repetir los elementos.

En el lanzamiento 7 veces de una moneda, en el que se anota si va saliendo cara o cruz, sí influye el orden. No hay que utilizar necesariamente todos los elementos y sí pueden repetirse los elementos. Por todo ello para calcular el número de agrupaciones posibles utilizamos las variaciones con repeticiónes de 2 elementos tomados de 7 en 7 dando como resultado 2^7=128 soluciones posibles del experimento.

$$VR_{2,7} = 2^7 = 128$$

14ª DIAPOSITIVA **Minuto: 08:22**

Cuando creamos grupos, pero a la hora de realizar los grupos tomamos todos los elementos del conjunto, utilizaremos las permutaciones. Estudiemos en primer lugar las **permutaciones sin repetición de N elementos** que nos permiten calcular las distintas formas de ordenar los N elementos diferentes del conjunto de forma que, una ordenación será diferente de otra con el simple cambio de colocación de uno de sus elementos

Imaginemos las formas diferentes que tiene una profesora de ordenar en clase a sus 18 estudiantes.

15ª DIAPOSITIVA **Minuto: 08:57**

Su nomenclatura es P subíndice N y la fórmula utilizada para calcular las permutaciones u ordenaciones de N elementos es calculando N factorial, es decir,

$$P_N = N! = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por ejemplo, si queremos ordenar 5 trofeos en la estantería tendríamos que calcular las permutaciones de 5 elementos sin repetición obteniéndose un resultado de 120 ordenaciones diferentes:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Veamos otro ejemplo para entender su aplicación en la vida real.

16ª DIAPOSITIVA **Minuto: 09:45**

Si queremos conocer de cuántas formas pueden quedar clasificados los 6 equipos de fútbol que participan en un torneo, deberemos utilizar las permutaciones sin repetición.

Nótese que tenemos N=6 equipos o elementos iniciales en el conjunto y que los elementos por grupo también son 6.

17ª DIAPOSITIVA **Minuto: 10:09**

Para el cálculo del número de posibles clasificaciones hay que resaltar que el orden de los elementos importa mucho pues cambiaría la clasificación. Además, hay que utilizar todos los elementos del conjunto original en las clasificaciones pues no se puede quedar ningún equipo sin clasificar y no se pueden repetir los elementos.

Con esta información aplicamos la fórmula de las permutaciones de 6 elementos que da como resultado:

$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{720}$ clasificaciones diferentes.

18ª DIAPOSITIVA **Minuto: 10:47**

Hay ocasiones en las que dentro del conjunto de elementos inicial se repiten algunas unidades por lo que los N elementos no son todos diferentes. Imaginemos que tenemos 9 bolas de colores, pero de ellas 3 son azules, 2 amarillas y 4 verdes, ¿cómo podríamos ordenar dichas bolas? No podríamos utilizar las permutaciones sin repetición, vistas anteriormente, aunque sí podemos calcular las posibles ordenaciones mediante las permutaciones con repetición pues nos permiten ordenar N elementos tomados de x_1 en x_1, x_2 en x_2 y x_k en x_k.

19ª DIAPOSITIVA **Minuto: 11:33**

Es importante resaltar que la suma de todas las repeticiones de todos los elementos diferentes debe sumar N y que el objetivo es ordenar esos N elementos, aunque en realidad no son todos diferentes. En el ejemplo de las bolas, aunque queremos ordenar las 9 bolas solo hay 3 colores diferentes con distintas repeticiones cada una. La azul se repite 3 veces, la amarilla 2 veces y la verde 4 veces.

20ª DIAPOSITIVA **Minuto: 12:04**

Su nomenclatura es P subíndice N mayúscula y superíndice x_1, x_2, x_k

Su formulación es

$$P_N^{x_1,x_2,\cdots,x_k} = \frac{N!}{x_1!\,x_2!\cdots x_k!}$$

De esta forma, y siguiendo con el ejemplo de ordenar las 9 bolas, con repetición, tendríamos un total de 1.260 ordenaciones posibles. Este cálculo se obtiene de resolver la permutación con repetición de 9 elementos con 4, 3 y 2 repeticiones respectivamente. Es decir, calcularíamos,

$$P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!\,3!\,2!} = 1.260$$

21ª DIAPOSITIVA **Minuto: 13:02**

En el ejemplo siguiente queremos calcular el número de palabras diferentes, con o sin sentido, que pueden formarse con TODAS las 6 letras de la palabra BANANA. Es importante incidir en que los grupos formados deben tener todas las letras del conjunto inicial, 6, pues en otro caso serían variaciones y no permutaciones.

Aunque tenemos 6 letras para ordenar formando palabras, en realidad solo hay 3 letras distintas que son la B, que solo está 1 vez en el conjunto inicial, la A, que aparece repetida 3 veces y la N que está 2 veces repetida.

Tal y como antes adelantábamos es importante que todas las repeticiones sumen el total de letras N=1+3+2=6.

22ª DIAPOSITIVA **Minuto: 13:54**

Para confirmar qué herramienta del análisis combinatorio es el adecuado para saber las palabras diferentes que se pueden formar es significativo concretar si influye el orden, si utilizaos todos los elementos, y si se repiten estos elementos. En el ejemplo hay que resaltar que sí importa el orden para la formación de palabras, que utilizamos todas las letras de la palabra BANANA y que los elementos sí se repiten en el conjunto inicial. Por todo ello calculamos las permutaciones con repetición de 6 elementos con 1, 3 y 2 repeticiones, de forma que el resultado es 60 palabras diferentes que resultan de dividir 6 factorial entre 1 factorial por 3 factorial por 2 factorial.

$$P_6^{1,3,2} = \frac{6!}{1!\,3!\,2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = 60$$

23ª DIAPOSITIVA **Minuto: 14:45**

El último grupo de herramientas de combinatoria que nos ayuda a conocer el total de agrupaciones que podemos hacer con **N elementos** tomados **de m en m** son las combinaciones, con o sin repetición.

Las combinaciones sin repetición se utilizan cuando queremos formar grupos en los que el orden de colocación de los elementos no importa y esta es la gran diferencia con las variaciones.

Una combinación será diferente a otra solo si hay uno o varios elementos diferentes.

24ª DIAPOSITIVA **Minuto: 15:19**

Imaginemos que en una clase queremos elegir un grupo de 2 estudiantes para hacer un trabajo. Si seleccionamos a María y Antonio el grupo sería el mismo que el formado por Antonio y María. El orden en este caso de colocación de los elementos en el grupo no afecta.

25ª DIAPOSITIVA **Minuto: 15:37**

Para el cálculo de las combinaciones, sin repetición, de N elementos tomados de m en m debemos realizar el siguiente cociente:

En el numerador se calcula N! siendo N el número de elementos que pueden formar parte del grupo.

En el denominador se calcula el producto de m! y (N-m)! siendo m el número de elementos que formarán el grupo.

Este cociente es el número combinatorio de N sobre m.

Su nomenclatura es C subíndice N, m.

$$C_{N.m} = \binom{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{m}} = \frac{N!}{m!\,(N-m)!}$$

Por ejemplo, si queremos calcular los grupos diferentes de 3 unidades , sin importar el orden, que se pueden hacer sobre un total de 9 elementos diferentes podemos resolver el número combinatorio de 9 sobre 3. Este número nos dará los posibles grupos diferentes y se calcula con el cociente de 9 factorial entre 3 factorial por (9-3) factorial.

$C_{9,3} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = 84$ grupos diferentes

Realizado este cálculo se tienen 84 posibles grupos de 3 unidades diferentes.

26ª DIAPOSITIVA **Minuto: 16:54**

Profundicemos más en su aplicación con el siguiente ejemplo.

En una pizzería se pueden elegir 5 ingredientes diferentes para formar la pizza a tu gusto y estos ingredientes se eligen de entre un total de 15. ¿Cuántas pizzas diferentes podríamos pedir?

Como hay 15 ingredientes a elegir sabemos que N=15. Además, como las pizzas se hacen con 5 ingredientes tenemos que m=5.

27ª DIAPOSITIVA **Minuto: 17:22**

A la hora de elegir los ingredientes claramente el orden no influye pues es lo mismo elegir primero queso y luego jamón que a la inversa. Por otra parte, los ingredientes que formarán la pizza no pueden repetirse pues nos dicen que deben elegirse 5 ingredientes diferentes.

Con esta información calcularemos las combinaciones de 15 elementos tomados de 5 en 5. Para ello, dividimos 15! entre el producto formado por 5! y (15-5)! obteniéndose un resultado de 3.003 pizzas diferentes.

Nótese que el orden de los ingredientes no altera el sabor de la pizza, pero en cuanto cambiemos la cebolla por el pollo la combinación cambia.

Es importante resaltar que si a la hora de elaborar la pizza nos permitieran repetir los ingredientes ya no sería válido este cálculo y tendríamos que considerar las combinaciones con repetición.

28ª DIAPOSITIVA **Minuto: 18:19**

Las combinaciones con repetición de **N elementos** tomados **de m en m** se definen como las distintas agrupaciones formadas con m elementos, eligiéndolos de entre los N elementos de que disponemos, pero teniendo en cuenta que el orden de los elementos no influye en la agrupación y que ahora los elementos sí pueden repetirse. Un elemento puede repetirse hasta m veces que es el número de elementos que forma el grupo.

29ª DIAPOSITIVA **Minuto: 18:48**

Su nomenclatura es CR subíndice N, m.

Su formulación es el número combinatorio de N+m-1 sobre m. Al igual que antes ahora para calcular el número de combinaciones con repetición que pueden hacerse con N elementos tomados de m en m se calcula el cociente cuyo numerador es (N+m-1)! y cuyo denominador es m! por (N-1)!

$$CR_{N.m} = \binom{N+m-1}{m} = \frac{(N+m-1)!}{m!\,(N-1)!}$$

Como ejemplo podemos calcular el número de combinaciones con repetición de 9 elementos tomados de 3 en 3. Para ello dividimos el número resultante de calcular (9+3-1)! es decir,11! entre el producto de 3! y (9-1)!

$$CR_{9,3} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3!\,8!} = 165$$

Tras calcular este cociente obtenemos que hay 165 combinaciones con repetición posibles.

30ª DIAPOSITIVA **Minuto: 19:54**

Para ver su aplicación estudiemos ahora las pizzas diferentes que pueden hacerse con 5 ingredientes, elegidos de un total de 15 posibles, pero con la peculiaridad de que en este caso los ingredientes sí se pueden repetir, por ejemplo, una pizza con doble de queso.

Como los ingredientes disponibles son 15 tenemos que N=15 y como las pizzas se cocinan con 5 ingredientes m=5.

31ª DIAPOSITIVA **Minuto: 20:24**

En este ejemplo no influye el orden en el que se eligen los ingredientes pues no importa pedir primero queso y luego jamón o al revés. Además, como ahora sí se permite repetir los ingredientes debemos realizar el cálculo a través de las combinaciones con repetición. Para ello dividimos 19! entre el producto formado por 5! y 14! dando como resultado 11.628 pizzas diferentes:

$$CR_{15,5} = \binom{15}{5} = \frac{19!}{5!\,14!} = \mathbf{11.628}$$

32ª DIAPOSITIVA **Minuto: 20:55**

Como resumen hay que decir que a la hora de saber qué herramienta del análisis combinatorio debemos utilizar para calcular las posibles agrupaciones debemos hacernos varias preguntas.

Primero si influye el orden o no, pues tanto las permutaciones como las variaciones calculan agrupaciones donde el cambio de un elemento hace que el grupo sea diferente. Segundo tendremos que preguntarnos si se pueden repetir o no los elementos en un grupo.

Cuando no afecta el orden de los elementos en el grupo hablaremos siempre de combinaciones, sean con o sin repetición.

33ª DIAPOSITIVA **Minuto: 21:34**

Muchas gracias por la atención.

Esperamos que la serie “Estadística para tod@s” sea un granito más para alcanzar una Universidad más inclusiva.